

# Compendium

J.C.A. Dekkers  
Philips Research Laboratories and  
NXP Semiconductors

December 14, 2006

## Abstract

...

## Contents

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Inleiding signaaltheorie</b>   | <b>3</b>  |
| 1.1      | Niet-periodieke signalen in het frequentie domein . . . . .               | 3         |
| 1.1.1    | Rekenregels voor $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$ . . . . .           | 3         |
| 1.1.2    | Standaard Fouriertransformaties . . . . .                                 | 4         |
| 1.1.3    | Gegeneraliseerde Fouriertransformaties . . . . .                          | 5         |
| 1.1.4    | Rekenregels en eigenschappen van de delta-distributie . . . . .           | 6         |
| 1.1.5    | Convolutie, Parseval, correlatie en bemonstering niet-periodieke signalen | 6         |
| 1.2      | Periodieke signalen . . . . .   | 8         |
| 1.2.1    | Rekenregels voor $f(t) \longleftrightarrow f(k)$ . . . . .                | 9         |
| 1.2.2    | Convolutie en Parseval . . . . .  | 9         |
| 1.3      | Lineaire tijdinvariante systemen . . . . .                                | 10        |
| 1.3.1    | Lineairiteit . . . . .  | 10        |
| 1.3.2    | Tijdinvariantie . . . . .   | 10        |
| 1.3.3    | Causaliteit . . . . .   | 10        |
| 1.3.4    | BIBO stabiliteit . . . . .  | 10        |
| 1.3.5    | Ideaal laagdoorlaatfilter . . . . .                                       | 11        |
| 1.4      | Goniometrische notities . . . . .   | 11        |
| <b>2</b> | <b>Stochastische en statistische signaaltheorie</b>                       | <b>12</b> |
| 2.1      | De autocorrelatie functie . . . . .                                       | 12        |
| 2.2      | Statistiek . . . . .  | 12        |
| 2.2.1    | Bepaling van de momenten . . . . .  | 13        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>3</b> | <b>De veldvergelijkingen in integraal- en differentiaalvorm</b>           | <b>14</b> |
| <b>4</b> | <b>Flux en arbeid</b>   | <b>17</b> |
| 4.1      | Operatoren . . . . .  | 17        |
| 4.1.1    | Vector identiteiten . . . . .   | 18        |
| 4.2      | Veldlijnen en potentiaalvelden (beide scalaire velden) . . . . .          | 18        |
| 4.3      | Flux, Gauß etc. . . . .   | 18        |
| 4.3.1    | "Oppervlakte" flux . . . . .  | 18        |
| 4.3.2    | Contourparametrisatie . . . . .   | 19        |
| 4.3.3    | "Volume" flux . . . . .   | 19        |
| 4.3.4    | Stelling van Stokes, ofwel flux van de rotatie (stroom van de rand) . . . | 19        |
| 4.3.5    | Stelling van Green . . . . .  | 19        |
| 4.4      | Stelling bepalende voorwaarde(n) . . . . .                                | 20        |
| 4.5      | Verandering van variabelen in meervoudige integralen . . . . .            | 20        |
| 4.6      | How to? . . . . .   | 21        |
| 4.7      | Parametriseren . . . . .  | 21        |
| 4.7.1    | De rechte lijn . . . . .  | 21        |
| 4.7.2    | De ellips . . . . .   | 21        |
| 4.8      | Bekende vectorvelden . . . . .  | 21        |
| 4.8.1    | B veld van de stroomvoerende draad . . . . .                              | 21        |
| 4.8.2    | E veld t.o.v. een punt . . . . .  | 21        |
| 4.9      | Bekende normaal vectoren . . . . .  | 21        |
| 4.9.1    | cilinder . . . . .  | 21        |
| 4.10     | Bepalen van extrema . . . . .   | 22        |
| 4.10.1   | Op het inwendige van een domein D . . . . .                               | 22        |
| 4.10.2   | Op de rand van een domein D . . . . .                                     | 22        |
| <b>5</b> | <b>Eenheden en de onderlinge verhouding</b>                               | <b>23</b> |
| <b>6</b> | <b>Materiaaleigenschappen</b>   | <b>24</b> |
| 6.1      | Wat voor eigenschappen? . . . . .   | 24        |
| 6.2      | Wat te doen met de eigenschappen? . . . . .                               | 25        |
| <b>7</b> | <b>De RIAA-IEC correctie bij platenspelers</b>                            | <b>28</b> |
| <b>8</b> | <b>Audio specificaties</b>  | <b>30</b> |
| 8.1      | Lineariteit . . . . .   | 30        |
| 8.2      | Niet-lineariteit . . . . .  | 30        |
| 8.3      | Overig . . . . .  | 30        |
| <b>9</b> | <b>Enkele uitspraken van Einstein</b>                                     | <b>31</b> |

# 1 Inleiding signaaltheorie

## 1.1 Niet-periodieke signalen in het frequentie domein

De fouriergetransformeerde (ook wel frequentiespectrum genoemd) van een niet-periodiek<sup>1</sup> signaal is<sup>2</sup>:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1)$$

De weg terug kan ook:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2)$$

$f(t)$  continue

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3)$$

$f(t)$  discontinue

Bovendien geldt:

$$F(f) = \frac{F(\omega)}{2\pi} \quad (4)$$

Notatie afspraak:

$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega) \quad (5)$$

### 1.1.1 Rekenregels voor $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$

#### Lineairiteit

$$F\{af(t) + bg(t)\} = aF\{f(t)\} + bF\{g(t)\} \quad (6)$$

#### Reciprociteit

$$\begin{aligned} \text{Als } f(t) &\longleftrightarrow F(\omega) \\ \text{dan } F(t) &\longleftrightarrow 2\pi f(-\omega) \end{aligned} \quad (7)$$

#### Conjugatie

$$f^*(t) \longleftrightarrow F^*(-\omega) \quad (8)$$

Als  $f(t)$  reeel is:

$$f^*(t) = f(t) \longleftrightarrow F^*(-\omega) = F(\omega)|_{\Im\{f(t)=0\}} \quad (9)$$

<sup>1</sup>niet-periodieke functies worden ook wel eindige functies genoemd

<sup>2</sup>in Mathematica: FourierParameters  $\rightarrow \{1,-1\}$

**Schaalverandering**

$$f(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \Big|_{\substack{a \neq 0 \\ a \in \mathbb{R}}} \quad (10)$$

bijzonder geval voor  $a = -1$ :

$$f(-t) \longleftrightarrow F(-\omega) \quad (11)$$

**t-verschuiving**

$$f(t - t_0) \longleftrightarrow F(\omega) e^{-j\omega t_0} \quad (12)$$

 **$\omega$ -verschuiving**

$$f(t) e^{j\omega_0 t} \longleftrightarrow F(\omega - \omega_0) \quad (13)$$

Hieruit volgt het modulatietheorema ( $f(t)$  reeel):

$$f(t) \cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} (f(t) e^{j\omega_0 t} + f(t) e^{-j\omega_0 t}) \longleftrightarrow \frac{1}{2} (F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)) \quad (14)$$

$$f(t) \sin(\omega_0 t) = \frac{1}{j2} (f(t) e^{j\omega_0 t} - f(t) e^{-j\omega_0 t}) \longleftrightarrow \frac{1}{j2} (F(\omega - \omega_0) - F(\omega + \omega_0)) \quad (15)$$

of met een faseverschuiving  $\varphi$ :

$$f(t) e^{j(\omega_0 t + \varphi)} \longleftrightarrow e^{j\varphi} F(\omega - \omega_0) \quad (16)$$

**t-differentiatie**

$$f'(t) \longleftrightarrow j\omega F(\omega) \quad (17)$$

 **$\omega$ -differentiatie**

$$\begin{aligned} -jtf(t) &\longleftrightarrow F'(\omega) \\ tf(t) &\longleftrightarrow jF'(\omega) \end{aligned} \quad (18)$$

**t-integratie**

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \longleftrightarrow \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0) \delta(\omega) \quad (19)$$

**1.1.2 Standaard Fouriertransformaties**

$$p_a(t) = \begin{cases} 1 & \left(|t| < \frac{a}{2}\right) \\ 0 & \left(|t| > \frac{a}{2}\right) \end{cases} \longleftrightarrow \frac{2 \sin\left(\frac{a\omega}{2}\right)}{\omega} \quad (20)$$

$$q_a(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{a} & (|t| < a) \\ 0 & (|t| \geq a) \end{cases} \longleftrightarrow \frac{4 \sin^2\left(\frac{a\omega}{2}\right)}{a\omega^2} \quad (21)$$

$$e^{-a|t|} (\Re(a) > 0) \longleftrightarrow \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \quad (22)$$

$$\frac{t^n}{n!} e^{-at} \varepsilon(t) (\Re(a) > 0) \longleftrightarrow \frac{1}{(a + j\omega)^{n+1}} \quad (23)$$

$$e^{-at^2} (a > 0) \longleftrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e\left(\frac{-\omega^2}{4a}\right) \quad (24)$$

### 1.1.3 Gegeneraliseerde Fouriertransformaties

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1 \quad (25)$$

$$1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega) \quad (26)$$

$$\delta(t - \tau) \longleftrightarrow e^{-j\omega\tau} \quad (27)$$

$$e^{j\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \quad (28)$$

$$\cos(\omega_0 t) \longleftrightarrow \pi \{ \delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0) \} \quad (29)$$

$$\sin(\omega_0 t) \longleftrightarrow -j\pi \{ \delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0) \} \quad (30)$$

$$\text{sgn}(t) \longleftrightarrow \frac{2}{j\omega} \quad (31)$$

$$\frac{1}{2} j \text{sgn}(t) \longleftrightarrow \frac{1}{\omega} \quad (32)$$

$$\varepsilon(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \quad (33)$$

$$\frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau} \varepsilon(t) \longleftrightarrow \frac{1}{1 + j\omega\tau} \quad (34)$$

$$\frac{e^{-\frac{t}{\tau_1}} - e^{-\frac{t}{\tau_2}}}{\tau_1 - \tau_2} \varepsilon(t) \longleftrightarrow \frac{1}{1 + j\omega\tau_1} \cdot \frac{1}{1 + j\omega\tau_2} \quad (35)$$

De Hilbert Transformatie:

$$\frac{1}{\pi t} \longleftrightarrow -j \text{sgn}(\omega) \quad (36)$$

Overigens:

$$\operatorname{sgn}(t) = 2\varepsilon(t) - 1 \quad (37)$$

$$p_a(t) = \varepsilon\left(t + \frac{a}{2}\right) - \varepsilon\left(t - \frac{a}{2}\right) = \varepsilon\left(-t + \frac{a}{2}\right) - \varepsilon\left(-t - \frac{a}{2}\right) \quad (38)$$

#### 1.1.4 Rekenregels en eigenschappen van de delta-distributie

##### Zeefeigenschap

$f(t)$  continu in  $t = \tau$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) f(t) dt = f(\tau) \quad (39)$$

$f(t)$  continu in  $t = \tau$

$$f(t) \delta(t - \tau) = f(\tau) \delta(t - \tau) \quad (40)$$

##### Convolutie

$$(f * \delta)(t) = f(t) \quad (41)$$

##### Schaalverandering

$$\delta(at + b) = \frac{1}{|a|} \delta\left(t + \frac{b}{a}\right) \quad (42)$$

##### Integratie

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \varepsilon(t) \quad (43)$$

##### Nulsignaal

$$\begin{aligned} t\delta(t) &= 0 \\ \omega\delta(\omega) &= 0 \end{aligned} \quad (44)$$

#### 1.1.5 Convolutie, Parseval, correlatie en bemonstering niet-periodieke signalen

De convolutie ofwel convolutieproduct van twee niet-periodieke signalen  $f(t)$  en  $g(t)$  is het signaal  $(f * g)(t)$ , gegeven door

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) f(t - \tau) d\tau = (g * f)(t) \quad (45)$$

Convolutiestelling in het tijddomein:

$$(f * g)(t) \longleftrightarrow F(\omega) G(\omega) \quad (46)$$

Convolutiestelling in het frequentiedomein:

$$f(t)g(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}(F * G)(\omega) \quad (47)$$

Overigens,

$$(F * G)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)G(\omega - u)du = \int_{-\infty}^{\infty} G(u)F(\omega - u)du = (G * F)(\omega) \quad (48)$$

De convolutie van  $p_a(t)$  met zichzelf is

$$(p_a * p_a)(t) = aq_a(t) \quad (49)$$

### Parseval

Zij  $f(t)$  een signaal met een eindige energie-inhoud  $E_f$  (absoluut integreerbaar). Dan geldt:

$$E_f = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega < \infty \quad (50)$$

### Correlatie

Kruiscorrelatie  $\rho_{1,2}$ :

$$\rho_{1,2}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t + \tau) f_2^*(\tau) d\tau \longleftrightarrow F_1(\omega) F_2^*(\omega) \{\rho_{1,2}(t) \neq \rho_{2,1}(t)\} \quad (51)$$

Autocorrelatie  $\rho_{1,1}(t) = \rho(t)$ :

$$\begin{aligned} &\text{Als } f_2(t) = f_1(t) = f(t), \text{ dan} \\ \rho_{1,1}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t + \tau) f^*(\tau) d\tau \longleftrightarrow F(\omega) F^*(\omega) \end{aligned} \quad (52)$$

### Bemonsteringstheorema

Zij  $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$  bandbegrensd (i.e.  $F(\omega) = 0$  voor  $|\omega| > \omega_c$ ) en zij  $f[n] = f(nT)$  een bemonstering van  $f(t)$  met bemonsteringsfrequentie  $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$  die voldoet aan  $\omega_s > 2\omega_c$ . Dan geldt:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] \frac{\sin\left(\omega_s \frac{t - nT}{2}\right)}{\omega_s \frac{t - nT}{2}} \quad (53)$$

### Nulde orde sample and hold

Ook wel staircase interpolation genoemd. De overdracht in het frequentiedomein:

$$H(j\omega) = \frac{\sin(\omega T_s)}{\omega} + j \frac{\cos(\omega T_s) - 1}{\omega} \quad (54)$$

### Quantisatie stapgrootte

De (kleinste) stapgrootte  $q$  is bij een gewone quantisator dmv afronding:

$$q = \frac{FullScale}{2^b - 1} \Rightarrow DR_{max,sinus} = 10 \log \left( \frac{3}{2} \cdot 2^{2b} \right) \quad (55)$$

Hierin is  $FullScale$  het bereik van de AD converter en  $b$  het aantal bits.

## 1.2 Periodieke signalen

Te schrijven als Fourierreeksen (periode  $T$ ,  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ ).

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)) \quad (56)$$

met

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt \quad (57)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(k\omega_0 t) dt \quad (58)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(k\omega_0 t) dt \quad (59)$$

Het is vaak compacter om de complexe notatie te gebruiken:

$$f(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad (60)$$

mits alle waarden voor  $k$  mee mogen doen, in het bijzonder  $k = 0$ <sup>3</sup>. De fouriercoëfficiënten  $c_k$  zijn:

<sup>3</sup>Is dit niet het geval, dan moet de complexe fourierreeks geschreven worden als

$$f(t) = a_0 + \sum_{\substack{k=-N \\ k \neq 0}}^{N} c_k e^{jk\omega_0 t}$$



$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = f_k \quad (61)$$

met de substitutie  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ . In voorgaande formule is  $f_k$  de fouriergetransformeerde (een soort  $F(w)$ ) is van  $f(t)$ , ofwel

$$\begin{aligned} f(t) &\longleftrightarrow f_k \\ \text{met } f(t) & \text{ T periodiek} \end{aligned} \quad (62)$$

De relatie tussen de coëfficiënten van de reële en de complexe Fourierreeks zijn als volgt samen te vatten:

$$\begin{aligned} a_k &= c_k + c_{-k} \\ b_k &= j(c_k - c_{-k}) \\ 2c_k &= a_k - jb_k \end{aligned} \quad (63)$$

### 1.2.1 Rekenregels voor $f(t) \longleftrightarrow f(k)$

#### t-verschuiving

$$f(t - \tau) \longleftrightarrow f_k e^{-jk\omega_0 \tau} \quad (64)$$

#### $\omega$ -verschuiving

$$f(t) e^{jn\omega_0 t} \longleftrightarrow f_{k-n} \quad (65)$$

#### Conjugatie

$$f^*(t) \longleftrightarrow f_{-k}^* \quad (66)$$

#### Tijdomkering

$$f(-t) \longleftrightarrow f_{-k} \quad (67)$$

### 1.2.2 Convolutie en Parseval

Het convolutieproduct  $(f * g)(t)$  is ook weer  $T$ -periodiek:

$$(f * g)(t) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) g(t - \tau) d\tau = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(\tau) f(t - \tau) d\tau = (g * f)(t) \quad (68)$$

Convolutiestelling voor periodieke signalen in het frequentiedomein:

$$(f * g)_k = f_k g_k \quad (69)$$

### Parseval

Zij  $f(t)$  een stuksgewijs glad  $T$ -periodiek signaal. Dan geldt voor de vermogensinhoud  $P_f$ :

$$P_f = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f_k|^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \quad (70)$$

## 1.3 Lineaire tijdinvariante systemen

### 1.3.1 Lineariteit

$$\underline{T} = \{a_1 u_1(t) + a_2 u_2(t)\} = a_1 \underline{T}\{u_1(t)\} + a_2 \underline{T}\{u_2(t)\} \quad (71)$$

### 1.3.2 Tijdinvariantie

$$\begin{aligned} u_1(t) = u(t) &\longrightarrow y_1(t) \\ u_2(t) = u(t - t_0) &\xrightarrow{?} y_1(t - t_0) = y_2(t) \end{aligned} \quad (72)$$

Als het systeem lineair en tijdinvariant is (LT), dan is  $h(t)$  bepaalbaar.

### 1.3.3 Causaliteit

$\underline{T}$  is causaal als  $h(t)$  causaal is. Of:

$$\begin{aligned} u_1(t), u_2(t) &\longrightarrow y_1(t), y_2(t) \\ \text{Causaal bij } t \leq t_0 &\text{ als} \\ u_1(t) = u_2(t) &\xrightarrow{?} y_1(t) = y_2(t) \\ \text{met bijv. } u_1(t) = 0 &\text{ en } u_2(t) = \varepsilon(t) \end{aligned} \quad (73)$$

### 1.3.4 BIBO stabiliteit

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \quad (74)$$

### 1.3.5 Ideaal laagdoorlaatfilter

Dat is een LT-systeem met frequentieresponsie:

$$H(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_0} & (|\omega| < \omega_c) \\ 0 & (|\omega| > \omega_c) \end{cases} \longleftrightarrow h(t) = \frac{\sin(\omega_c(t - t_0))}{\pi(t - t_0)} \quad (75)$$

## 1.4 Goniometrische notities

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= \frac{1 + \cos(2x)}{2} \\ \sin^2 x &= \frac{1 - \cos(2x)}{2} \end{aligned} \quad (76)$$

## 2 Stochastische en statistische signaaltheorie

### 2.1 De autocorrelatie functie

De autocorrelatie is als volgt gedefinieerd:

$$R_{\underline{x}\underline{x}}(\tau, t + \tau) = \mathbf{E} \{x^*(t) x(t + \tau)\} \quad (77)$$

waarbij  $\mathbf{E}$  staat voor Expectation. De stochast wordt zwak-stationair genoemd als de autocorrelatiefunctie alleen een functie is van  $\tau$  en het gemiddelde constant is.

Wiener-Khinchin theorema:

$$R_{\underline{x}\underline{x}}(\tau) \longleftrightarrow S_{VV}(\omega) \quad (78)$$

De vermogensinhoud van een zwak-stationair proces is gegeven door:

$$R_{\underline{x}\underline{x}}(\tau = 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{VV}(\omega) d\omega = P_f = \mu^2 + \sigma^2 \quad (79)$$

### 2.2 Statistiek

Twee belangrijke begrippen van de continu verdeelde stochast:

- de kansdichtheidsfunctie  $f_{\underline{x}}(x)$
- de kansverdelingsfunctie  $F_{\underline{x}}(x)$

Met de volgende eigenschappen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{\underline{x}}(x) dx = 1 \quad (80)$$

$$f_{\underline{x}}(x) = \frac{dF_{\underline{x}}(x)}{dx}$$

Verder is het zo

$$F_{\underline{x}}(u) = P(\underline{x} \leq u) = \int_{-\infty}^u f_{\underline{x}}(x) dx, \quad (81)$$

$$P(a \leq \underline{x} \leq b) = \int_a^b f_{\underline{x}}(x) dx \quad (82)$$

### 2.2.1 Bepaling van de momenten

Eerste moment of verwachtingswaarde  $\mu$

$$\mu = \mathbf{E}(\underline{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\underline{x}}(x) dx \quad (83)$$

Tweede moment of variantie  $\text{var } \underline{x} = \sigma^2$

$$\sigma^2 = \text{var } \underline{x} = \mathbf{E} \{ [\underline{x} - \mathbf{E}(\underline{x})]^2 \} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f_{\underline{x}}(x) dx \quad (84)$$

In zijn algemeenheid mag men stellen

$$\text{moment } k = \mu_k(\underline{x}) = \mathbf{E} \{ [\underline{x} - \mathbf{E}(\underline{x})]^k \} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^k f_{\underline{x}}(x) dx \quad (85)$$

Qua vorm kan men het derde en vierde moment gebruiken. De mate van scheefheid is vervat in het derde moment en de bijdrage van de "staarten" zit hem in het vierde moment, waarbij de normale verdeling als meest ideaal beschouwd wordt.

De scheefheidscoëfficiënt is een genormaliseerde grootte en is gegeven door

$$\gamma_1(\underline{x}) = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \quad (86)$$

De mate van welving (=kurtosis) wordt weergegeven door de coëfficiënt van kurtosis

$$\gamma_2(\underline{x}) = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 \quad (87)$$

Waarbij er sprake is van dikke staarten bij  $\gamma_2 > 0$  en dunne staarten als  $\gamma_2 < 0$ . Bij  $\gamma_2 = 0$  zijn de staarten net zo als bij de normale verdeling.

#### Voorbeeld

Een sinusvormig signaal  $y = A \sin(x)$  heeft een kansdichtheidsfunctie

$$f_{\underline{y}}(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \sqrt{A^2 - y^2}} & |y| < A \\ 0 & |y| > A \end{cases} \quad (88)$$

Invullen (integratiegrenzen van  $-A$  tot  $A$ ) levert  $\mu = 0$ ,  $\sigma^2 = \frac{A^2}{2}$ ,  $\gamma_1 = 0$  (ofwel een symmetrische functie) en  $\gamma_2 = -\frac{3}{2}$ .

### 3 De veldvergelijkingen in integraal- en differentiaalvorm

Voor de *plaats-frequentieruimte*<sup>4</sup> kan men schrijven:

*Wet van Faraday-Henry:*

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot \underline{\tau} dl = -j\omega \int_S \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dA \Leftrightarrow \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B} \quad (89)$$

*Wet van Ampère-Maxwell:*

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot \underline{\tau} dl = \int_S \int (\mathbf{J} + j\omega \mathbf{D}) \cdot \mathbf{n} dA \Leftrightarrow \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega \mathbf{D} \quad (90)$$

*Wet van behoud van lading:*

$$\oiint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dA = -j\omega \int_V \int \int \rho dV \Leftrightarrow \nabla \bullet \mathbf{J} = -j\omega \rho \quad (91)$$

en voor de hulpbetrekkingen kan men schrijven:

*het licht moet ooit zijn aangedaan:*

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dA = 0 \Leftrightarrow \nabla \bullet \mathbf{B} = 0 \quad (92)$$

*Stelling van Gauss:*

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dA = \int_V \int \int \rho dV \Leftrightarrow \nabla \bullet \mathbf{D} = \rho \quad (93)$$

Bovendien geldt:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M} \quad (94)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (95)$$

Voor de materievelden kan men schrijven

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_{prim} + \rho_{sec} \quad [A \text{sm}^{-3}] \\ \mathbf{J} &= \mathbf{J}_{prim} + \mathbf{J}_{sec} \quad [A \text{m}^{-2}] \\ \mathbf{M} &= \mathbf{M}_{prim} + \mathbf{M}_{sec} \\ \mathbf{P} &= \mathbf{P}_{prim} + \mathbf{P}_{sec} \end{aligned} \quad (96)$$

Hierin stelt  $\mathbf{M}$  het magnetisatieveld voor en stelt  $\mathbf{P}$  het polarisatieveld voor. Het magnetisatieveld beschrijft de rotatie van elektronen ten opzichte van de kern van een atoom. Het

<sup>4</sup>Dit is de Fourier getransformeerde van de *plaats-tijdruimte*.

polarisatieveld beschrijft de translatie van een elektronenwolk ten opzichte van een kern van een atoom.

De subscripten *prim* en *sec* stellen respectievelijk het primaire en het secundaire veld voor. Primaire materievelden worden extern opgedrukt en zijn onafhankelijk van het elektromagnetische veld ( $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ ) ter plaatse. Een secundair veld is het gevolg van de wisselwerking tussen het elektromagnetische veld ( $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ ) en de geladen materiedeeltjes.

Alles wat er is:

$$\begin{aligned}
 \oint_C E \cdot \tau dl &= -j\omega \int_S B \cdot n dA \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \times E = -j\omega B \\
 \oint_C H \cdot \tau dl &= \int_S (J + j\omega D) \cdot n dA \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \times H = J + j\omega D \\
 \oint_S J \cdot n dA &= -j\omega \int_V \rho dV \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \cdot J = -j\omega \rho \\
 \oint_S B \cdot n dA &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \cdot B = 0 \\
 \oint_S D \cdot n dA &= \int_V \rho dV \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \cdot D = \rho \\
 B &= \mu_0 H + \mu_0 M \\
 D &= \varepsilon_0 E + P \\
 \rho &= \rho_{prim} + \rho_{sec} \\
 J &= J_{prim} + J_{sec} \\
 M &= M_{prim} + M_{sec} \\
 P &= P_{prim} + P_{sec}
 \end{aligned} \tag{97}$$



## 4 Flux en arbeid

Deze samenvatting gaat over vector- en scalar velden, flux en arbeid en operatoren. Flux en arbeid zijn in woord als volgt gedefinieerd:

- *arbeid* = vectorveld over een lijn integreren en
- *flux* = vectorveld over een oppervlak integreren.

Waarbij flux gedefinieerd kan zijn voor een oppervlakte of gesloten oppervlakte (volume).

### 4.1 Operatoren

In het algemeen onderscheidt men een scalar- of vectorveld. Een scalarveld wordt genoteerd als

$$f(x, y, z) \quad (98)$$

en een vectorveld als

$$\mathbf{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z) \mathbf{i} + F_2(x, y, z) \mathbf{j} + F_3(x, y, z) \mathbf{k}. \quad (99)$$

Om van een scalar- naar een vectorveld of andersom te gaan, worden de operatoren *gradient* ( $\nabla$ ) en *divergentie* ( $\nabla \bullet$ ) gebruikt.

*scalar*  $\rightarrow$  *vector*:

$$\mathbf{grad} f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \mathbf{k} \quad (100)$$

*vector*  $\rightarrow$  *scalar*:

$$\mathbf{div} \mathbf{F}(x, y, z) = \nabla \bullet \mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial F_3}{\partial z}(x, y, z) \quad (101)$$

*vector*  $\rightarrow$  *vector*:

Om een vectorveld te roteren is er de *rotatie*, afgekort **rot** of **curl**, en wordt gegeven door:

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \mathbf{F} &= \mathbf{curl} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} \\ &= \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathbf{k} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (102)$$

Waarbij de operator  $\begin{vmatrix} | & | & | \end{vmatrix}$  staat voor de determinant.

*scalar*  $\rightarrow$  *vector*  $\rightarrow$  *scalar*:

Ofwel de Laplace-operator  $\nabla^2$ ,

$$\mathbf{div} \mathbf{grad} f(x, y, z) = \nabla \cdot [\nabla f(x, y, z)] = \nabla^2 f(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) \quad (103)$$

Voor het speciale geval dat  $\nabla^2 f(x, y, z) = 0$ , ontstaat een partiele differentiaalvergelijking. De oplossingen hiervan worden *harmonische functies* genoemd. De Laplace operator kan ook voorkomen bij vectorvelden en is dan gegeven door

$$\nabla^2 \mathbf{F}(x, y, z) = [\nabla^2 F_1(x, y, z)] \mathbf{i} + [\nabla^2 F_2(x, y, z)] \mathbf{j} + [\nabla^2 F_3(x, y, z)] \mathbf{k} \quad (104)$$

#### 4.1.1 Vector identiteiten

Als  $\phi$  en  $\psi$  scalaire velden zijn en  $\mathbf{F}$  en  $\mathbf{G}$  vector velden, gelden de volgende relaties:

$$\begin{aligned} \nabla(\phi\psi) &= \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi \\ \nabla \bullet (\phi\mathbf{F}) &= (\nabla\phi) \bullet \mathbf{F} + \phi(\nabla \bullet \mathbf{F}) \\ \nabla \times (\phi\mathbf{F}) &= (\nabla\phi) \times \mathbf{F} + \phi(\nabla \times \mathbf{F}) \\ \nabla \bullet (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) &= (\nabla \times \mathbf{F}) \bullet \mathbf{G} - \mathbf{F} \bullet (\nabla \times \mathbf{G}) \\ \nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) &= (\nabla \bullet \mathbf{G}) \mathbf{F} + (\mathbf{G} \bullet \nabla) \mathbf{F} - (\nabla \bullet \mathbf{F}) \mathbf{G} - (\mathbf{F} \bullet \nabla) \mathbf{G} \\ \nabla(\mathbf{F} \bullet \mathbf{G}) &= \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}) + (\mathbf{F} \bullet \nabla) \mathbf{G} + (\mathbf{G} \bullet \nabla) \mathbf{F} \\ \nabla \bullet (\nabla \times \mathbf{F}) &= 0 \quad (\mathbf{div\ rot} = 0) \\ \nabla \times (\nabla\phi) &= \mathbf{0} \quad (\mathbf{rot\ grad} = \mathbf{0}) \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) &= \nabla(\nabla \bullet \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F} \quad (\mathbf{rot\ rot} = \mathbf{grad\ div} - \mathit{Laplaciaan}) \end{aligned} \quad (105)$$

## 4.2 Veldlijnen en potentiaalvelden (beide scalaire velden)

**Veldlijnen** worden ook wel integral curves, streamlines, flow lines of lines of force genoemd. Als een vectorveld gedefinieerd is volgens vergelijking (99), dan worden de veldlijnen gegeven door de oplossing van het stelsel

$$\frac{dx}{F_1(x, y, z)} = \frac{dy}{F_2(x, y, z)} = \frac{dz}{F_3(x, y, z)}. \quad (106)$$

Het komt er dus op neer dat er stelsels differentiaal vergelijkingen moeten worden opgelost.

Het **potentiaalveld** of gradientveld  $\phi(x, y, z)$  van een vectorveld volgens (99), wordt gekarakteriseerd door

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x, y, z) &= \nabla\phi(x, y, z) \quad \Rightarrow \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x}\phi(x, y, z) = F_1(x, y, z) \\ \frac{\partial}{\partial y}\phi(x, y, z) = F_2(x, y, z) \\ \frac{\partial}{\partial z}\phi(x, y, z) = F_3(x, y, z) \end{array} \right. & \quad (107) \end{aligned}$$

Waarbij slechts speciale velden voldoen, zogenaamde conservatieve velden.

## 4.3 Flux, Gauß etc.

### 4.3.1 "Oppervlakte" flux

Zoals vermeld in de abstract moet er geïntegreerd worden over een oppervlakte  $S$ , ofwel

$$\iint_S \mathbf{F} \bullet \mathbf{n} \, dS \quad (108)$$

### 4.3.2 Contourparametrisatie

Met behulp van parametrisatie kan men de oppervlakte flux van een scalair veld met een begrenzend contour  $C$  of een set van intercepterende contouren, schrijven als

$$\int_{C(x,y,z)} f(x,y,z) ds = \int_{C(t)} f(\mathbf{r}(t)) \left| \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right| dt \quad (= flux?) \quad (109)$$

Waarbij  $\mathbf{r}(t)$  gegeven wordt door

$$\mathbf{r}(t) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}. \quad (110)$$

### 4.3.3 "Volume" flux

Is gerelateerd aan de flux in een punt, ofwel de flux per eenheid van volume (fluxdichtheid). Integratie van deze grootheid over een volume geeft dan de flux. Per definitie geldt

$$fluxdichtheid = \mathbf{div} \mathbf{F} = \nabla \bullet \mathbf{F}. \quad (111)$$

De flux wordt dan uitgerekend met de stelling van Gauß

$$\iiint_D \mathbf{div} \mathbf{F} dV = \oiint_S \mathbf{F} \bullet \mathbf{N} dS \quad (112)$$

### 4.3.4 Stelling van Stokes, ofwel flux van de rotatie (stroom van de rand)

Arbeid ( $W$ ):

$$W = \int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_C (\underline{u}, \underline{t}) ds \quad (113)$$

waarbij  $C$  een lijn is en de meest rechtse uitdrukking de oude notatie voorstelt. Overigens, het is de bedoeling dat formule (113) geparametriseerd wordt en vervolgens

$$\int_a^b \mathbf{F} \bullet \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \int_a^b \left[ F_1(x(t), y(t), z(t)) \frac{dx}{dt} + F_2(x(t), y(t), z(t)) \frac{dy}{dt} + F_3(x(t), y(t), z(t)) \frac{dz}{dt} \right] dt \quad (114)$$

Als het begin- en eindpunt samenkomen, dan schrijven we

$$W = \oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \iint_S \mathbf{rot} \mathbf{F} \bullet \mathbf{N} dS \quad (115)$$

### 4.3.5 Stelling van Green

Gerelateerd aan formule (115) is de Stelling van Green:

$$\oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \oint_C F_1(x,y) dx + F_2(x,y) dy = \iint_R \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA \quad (116)$$

#### 4.4 Stelling bepalende voorwaarde(n)

$F$  is conservatief:

- $\text{rot } \mathbf{F} = 0$  en
- domein  $D$  enkelvoudig samenhangend (binnenin netjes gedefinieerd)

$F$  heeft een vectorpotential

- $\text{div } \mathbf{F} = 0$  en
- $\mathbf{F}$  is gedefinieerd op domein  $D$  dat voor ieder gesloten oppervlak in  $D$  het inwendige in  $D$  ligt (?).

#### 4.5 Verandering van variabelen in meervoudige integralen

Voor drie variabelen<sup>5</sup> geldt de volgende substitutie:

$$dV = dx dy dz = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw. \quad (117)$$

Waarbij  $\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right|$  staat voor de absolute waarde van de Jacobiaan (voluit: Jacobiaanse determinant). De Jacobiaan van twee variabelen wordt gegeven door

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \quad (118)$$

en voor drie variabelen geldt

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \quad (119)$$

Bij voorbeeld de transformatie van cartesische naar cilinder coördinaten. Dit gaat als volgt:

- $u = r$
- $v = \theta$
- $w = z$
- $x = r \cos \theta$
- $y = r \sin \theta$
- $z = z$

Waaruit blijkt dat de Jacobiaan  $r$  is.

<sup>5</sup>Voor twee variabelen moet de derde variabele gewoon weggedacht worden.

## 4.6 How to?

In dit gedeelte van de samenvatting zal een beknopt overzicht gegeven worden van methoden mbt verandering van coördinaten en andere zaken.

## 4.7 Parametriseren

### 4.7.1 De rechte lijn

Een rechte lijn wordt als volgt geparametriseerd:

$$(1 - t)(x_{start}, y_{start}, z_{start}) + t(x_{eind}, y_{eind}, z_{eind}) = (x, y, z) \quad ; \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (120)$$

en vervolgens het stelsel oplossen.

### 4.7.2 De ellips

Een ellips werkt als volgt:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= a \cos t \\ y &= b \sin t \end{aligned} \quad (121)$$

## 4.8 Bekende vectorvelden

Ter leeringh en vermaak volgen hieronder veel voorkomende vector velden:

### 4.8.1 B veld van de stroomvoerende draad

Hierbij is de draad zelf in de z-richting gelegd:

$$\mathbf{B}(x, y, z) = \frac{\mu I}{2\pi} \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right) \quad (122)$$

### 4.8.2 E veld t.o.v. een punt

Het punt bevindt zich in de oorsprong:

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left( \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (123)$$

## 4.9 Bekende normaal vectoren

### 4.9.1 cilinder

Bij een cilinder die als lengte-as de z-as heeft, geldt voor het bovenvlak:

$$\mathbf{N} = \mathbf{k} \quad (124)$$

voor het ondervlak geldt

$$\mathbf{N} = -\mathbf{k} \quad (125)$$

en voor de mantel geldt:

$$\mathbf{N} = \cos(\theta) \mathbf{i} + \sin(\theta) \mathbf{j} \quad (126)$$

## 4.10 Bepalen van extrema

### 4.10.1 Op het inwendige van een domein D

Dit is eenvoudig te doen door het oplossen van:

$$\mathbf{grad} f(x, y, z) = (0, 0, 0) \quad (127)$$

### 4.10.2 Op de rand van een domein D

Hierbij worden neven conditie(s) (dit is dus de rand!) gegeven in de vorm van  $g(x, y, z) = 0$ , ofwel de multiplicatoren methode van Lagrange. Een extra constante  $\lambda$  wordt ingevoerd en vormt samen met de oorspronkelijke functie een nieuw scalair veld  $L(x, y, z, \lambda)$ . In formulevorm

$$L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) \quad (128)$$

De extrema worden dan bepaalt door

$$\mathbf{grad} L(x, y, z, \lambda) = (0, 0, 0, 0) \quad (129)$$

to be done: kritieke of stationaire punten bepaling en classificatie mbv de Hessiaan matrix, iets met  $\sqrt{1+()^2+()^2}$  etc, algemene formule voor een driehoekig vlak en berekening met tetrahedron.

## 5 Eenheden en de onderlinge verhouding

- Eenheid van energie (Joule)

$$J = Nm \quad (130)$$

- Eenheid van vermogen (Watt)

$$W = \frac{J}{s} = \frac{Nm}{s} \quad (131)$$

- Eenheid van massa (kg)

$$kg = \frac{Js^2}{m^2} \quad (132)$$

- Eenheid van kracht (Newton)

$$N = \frac{CV}{m} = \frac{VA_s}{m} \quad (133)$$

- Eenheid van lading (Coulomb)

$$C = As \quad (134)$$

- Eenheid van elektrische spanning (Volt)

$$V = \frac{kgm^2}{As^3} \quad (135)$$

- Eenheid van capaciteit (Farad)

$$F = \frac{C}{V} = \frac{As}{V} \quad (136)$$

- Eenheid van inductie (Henry)

$$H = \frac{Vs}{A} \quad (137)$$

- Overigens:

$$\frac{N}{m^2} = \frac{J}{m^3} \quad (138)$$

$$\frac{kg}{s^3} = \frac{W}{m^2}$$

## 6 Materiaaleigenschappen

Vaak is het zo dat men even snel gegevens moet hebben van bijvoorbeeld aluminium. Wat dan volgt is een zoektocht die vaak langer duurt dan gewenst. Dit document somt de meeste relevante materiaal eigenschappen op die een electronicus nodig zou kunnen hebben in zijn dagelijks werk.

### 6.1 Wat voor eigenschappen?

In de tabel zal worden aangegeven:

- soortelijke weerstand bij 20 C ( $\rho_{20}$ )
- temperatuurscoefficient soortelijke weerstand bij 20 C ( $\alpha$ )
- relatieve dielektrische constante (permittiviteit) t.o.v. het vacuum ( $\epsilon_r$ )
- relatieve permeabiliteit t.o.v. het vacuum ( $\mu_r$ )



| materiaal        | $\rho_{20}$<br>[ $\frac{n\Omega m^2}{m}$ ] | $\alpha$<br>[ $mK^{-1}$ ] | $\epsilon_r$<br>[...] | $\mu_r$<br>[...] | $v_{geluid}$<br>[ $\frac{m}{s}$ ] |
|------------------|--|---------------------------|-----------------------|------------------|-----------------------------------|
| aluminium        | 28   | +3.9                      |                       |                  | 5100                              |
| aluminium oxide  |  |                           | 9.8                   |                  |                                   |
| diamant          |  |                           | 5.5                   |                  |                                   |
| GaAs             |  |                           | 12.9                  |                  |                                   |
| germanium        |  |                           | 16                    |                  |                                   |
| goud (?karaat)   | 23   | +3.6                      |                       |                  |                                   |
| InP              |  |                           | 12.4                  |                  |                                   |
| koolstof         | 13750                                      |                           |                       |                  | 18350                             |
| koper            | 17.5                                       | +3.9                      |                       |                  | 3800                              |
| lucht            |  |                           | 1.00059               | 1.00000038       | 343                               |
| messing          | 70   | +2                        |                       |                  |                                   |
| PE, polyethyleen |  |                           | 2.25                  |                  |                                   |
| PTFE, Teflon     |  |                           | 2.1                   |                  |                                   |
| polystyreen      |  |                           | 2.4 - 2.7             |                  |                                   |
| silicium         |  |                           | 11.9                  |                  |                                   |
| rubber           |  |                           | 7                     |                  |                                   |
| tin              | 115  | +4.3                      |                       |                  |                                   |
| water            |  |                           | 80                    |                  | 1484                              |
| ijzer            | 100  | +5                        |                       |                  | 5100                              |
| zilver           | 16   | +3.8                      |                       |                  |                                   |

## 6.2 Wat te doen met de eigenschappen?

DC-weerstand:

$$R_{DC} = \frac{\rho \cdot l}{A} \quad [\Omega] \quad (139)$$

Skin effect:

De skindiepte is de afstand vanaf het oppervlak waar de stroomsterkte tot  $e^{-1} \cdot 100\%$  is afgenomen.

$$skindiepte = \delta_{skin} = \sqrt{\frac{\rho}{\pi f \mu_0 \mu_r}} \quad [m], \quad (140)$$

met  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ .

AC-weerstand:

Voor een ronde geleider kan worden afgeleid

$$R_{AC} = \frac{\rho}{\delta_{skin}} \left\{ \frac{l}{\pi (d - \delta_{skin})} \right\} \Big|_{\delta_{skin} < 5d} \quad [\Omega] \quad (141)$$

Voor een meer gedetailleerde beschrijving van de impedantie van een ronde geleider als functie van de frequentie, kan men schrijven voor het reële gedeelte

$$\Re \{Z_{rod}\} = \frac{l \cdot R_x}{\sqrt{2} \pi r} \left[ \frac{\text{Ber} \{q\} \text{Bei}' \{q\} - \text{Bei} \{q\} \text{Ber}' \{q\}}{(\text{Ber}' \{q\})^2 + (\text{Bei}' \{q\})^2} \right] \quad (142)$$

en voor het imaginaire deel

$$\Im \{Z_{rod}\} = \omega L = \frac{l \cdot R_x}{\sqrt{2} \pi r} \left[ \frac{\text{Ber} \{q\} \text{Ber}' \{q\} + \text{Bei} \{q\} \text{Bei}' \{q\}}{(\text{Ber}' \{q\})^2 + (\text{Bei}' \{q\})^2} \right] \quad (143)$$

Hierin is  $l$  de lengte van de geleider,  $R_x = \frac{\rho}{\delta_{skin}}$ ,  $r$  de straal van de ronde geleider en  $q = \frac{\sqrt{2} r}{\delta_{skin}}$ . De operatoren  $\text{Ber} \{\cdot\}$  en  $\text{Bei} \{\cdot\}$  stellen Kelvin functies voor en de afgeleide van deze functies is

$$\begin{aligned} \frac{d\text{Ber}\{q\}}{dq} &\equiv \text{Ber}' \{q\} \\ \frac{d\text{Bei}\{q\}}{dq} &\equiv \text{Bei}' \{q\} \end{aligned} \quad (144)$$

Bovenstaande Kelvin functies zijn op hun beurt weer gedefinieerd als

$$J_\kappa \left( z e^{j \frac{3\pi}{4}} \right) = J_\kappa \left( j \sqrt{j} z \right) = \text{Ber}_\kappa \{z\} + j \text{Bei}_\kappa \{z\}, \quad (145)$$

Het zijn dus Bessel functies van de eerste soort, ofwel

$$\text{Bessel}J(n, m) \equiv J_n(m). \quad (146)$$

Waarbij  $m$  het argument (expressie) voorstelt en  $n$  de orde of index van de functie is. In Eqs. (142), (143) en (144) is de orde 0. In dit speciale geval kan men schrijven:

$$\begin{aligned} \text{Ber} \{z\} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^{4n}}{[(2n)!]^2} \\ \text{Bei} \{z\} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^{2+4n}}{[(2n+1)!]^2} \end{aligned} \quad (147)$$

Soms kan het handig zijn om de Kelvin functie te schrijven in analytische vorm, ofwel

$$\begin{aligned} \text{Ber} \{z\} &= \frac{1}{2} \left[ I_0 \left\{ (-1)^{\frac{1}{4}} z \right\} + J_0 \left\{ (-1)^{\frac{1}{4}} z \right\} \right] = \frac{1}{2} \left[ I_0 \left\{ (-1)^{\frac{1}{4}} z \right\} + I_0 \left\{ (-1)^{\frac{3}{4}} z \right\} \right] \\ \text{Bei} \{z\} &= \frac{j}{2} \left[ J_0 \left\{ (-1)^{\frac{1}{4}} z \right\} - I_0 \left\{ (-1)^{\frac{1}{4}} z \right\} \right] = \frac{j}{2} \left[ I_0 \left\{ (-1)^{\frac{3}{4}} z \right\} - I_0 \left\{ (-1)^{\frac{1}{4}} z \right\} \right] \end{aligned} \quad (148)$$

Hierin is

$$BesselI(n, m) \equiv I_n(m) \quad (149)$$

de gemodificeerde Bessel functie van de eerste soort. De vergelijkingen (142) en (143) zijn dan ook te herschrijven naar een wat meer gangbare vorm. Laten we definiëren:

$$\begin{aligned} \Phi &= (-1)^{\frac{1}{4}} \\ \Psi &= (-1)^{\frac{3}{4}} \end{aligned} \quad (150)$$

Dan is de impedantie te schrijven als

$$\begin{aligned} \Re\{Z_{rod}\} &= \frac{l \cdot R_x}{2\sqrt{2}\pi r} \left[ \frac{\Phi I_0(\Phi q)}{I_1(\Phi q)} + \frac{\Psi I_0(\Psi q)}{I_1(\Psi q)} \right] \\ \Im\{Z_{rod}\} &= \omega L = -\frac{l \cdot R_x}{2\sqrt{2}\pi r} \left[ \frac{\Psi I_0(\Phi q)}{I_1(\Phi q)} + \frac{\Phi I_0(\Psi q)}{I_1(\Psi q)} \right] \end{aligned} \quad (151)$$

## 7 De RIAA-IEC correctie bij platenspelers

Er zijn in totaal 5 tijdconstanten bij het afspelen van een vinyl plaat. De overdracht in het Laplace domein is

$$H_{RIAA,Decoder} = \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_4 s)\tau_5 s}{(1 + \tau_2 s)(1 + \tau_3 s)(1 + \tau_5 s)} \quad (152)$$

Hierin zijn de tijdconstanten

- $\tau_1 = 318\mu s$ ,
- $\tau_2 = 3180\mu s$ ,
- $\tau_3 = 75\mu s$ ,
- $\tau_4 = 3.18\mu s$ ,
- $\tau_5 = 7950\mu s$ ,

Fig. 1 geeft de amplitude karakteristiek weer.

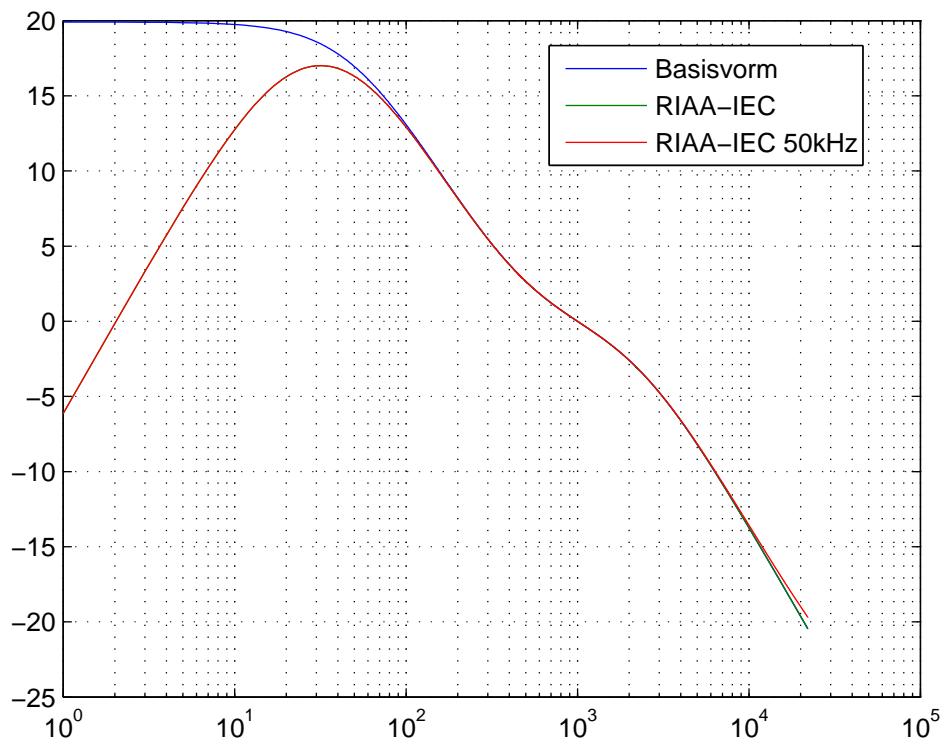


Figure 1: De op 1 kHz genormaliseerde overdracht van een RIAA-IEC correctienetwerk.

Overigens, de waarde van de overdracht op 1 kHz is -19.911 dB. De absolute waarde in het kwadraat ziet er zo uit:

$$|H_{RIAA,Decoder}|^2 = \frac{(1 + \tau_1^2 \omega^2)(1 + \tau_4^2 \omega^2) \tau_5^2 \omega^2}{(1 + \tau_2^2 \omega^2)(1 + \tau_3^2 \omega^2)(1 + \tau_5^2 \omega^2)} \quad (153)$$

De groupdelay is gegeven door

$$-\frac{d\varphi}{d\omega} = -\frac{\tau_1}{1 + \tau_1^2 \omega^2} + \frac{\tau_2}{1 + \tau_2^2 \omega^2} + \frac{\tau_3}{1 + \tau_3^2 \omega^2} - \frac{\tau_4}{1 + \tau_4^2 \omega^2} + \frac{\tau_5}{1 + \tau_5^2 \omega^2} \quad (154)$$

## 8 Audio specificaties

Dit hoofdstuk is een opsomming van technische eigenschappen waaraan een audio component aan zou moeten voldoen. Volgens de auteur.

### 8.1 Lineariteit

- amplitude afwijking  $< 0.3$  dB,
- groepslooptijd  $-\frac{d\varphi}{d\omega} < 250$  microseconde ( $f > 100$  Hz),
- bandbreedte ten minste 10 Hz - 20 kHz en
- signaal-ruisverhouding bij normaal luisterniveau  $> 90$  dB

### 8.2 Niet-lineariteit

- THD (inclusief crossoververvorming)  $< 0.05$  % voor zuivere tonen,
- THD (inclusief crossoververvorming)  $< 1$  % voor muziek ( $100 \text{ Hz} < f < 2 \text{ kHz}$ ),
- THD (inclusief crossoververvorming)  $< 10$  % voor muziek ( $f < 100$  Hz) en
- slewrate  $> A_{pick} 2\pi f_{max} \approx 0.5V/\mu s$  per  $4V_{pick}$ .

### 8.3 Overig

- tijdinvariant, bijvoorbeeld stabiele instelling
- bronvrij, bijvoorbeeld niet oscillerend of het voedingsresidu beneden een bepaald niveau (zie SNR)
- geheugenvrij, geen verschil in response door verschillende signalen te verwisselen in tijd

## 9 Enkele uitspraken van Einstein

"Imagination is more important than knowledge."

"Gravitation is not responsible for people falling in love."

"I want to know God's thoughts; the rest are details."

"The hardest thing in the world to understand is the income tax."

"Reality is merely an illusion, albeit a very persistent one."

"The only real valuable thing is intuition."

"A person starts to live when he can live outside himself."

"I am convinced that He (God) does not play dice."

"God is subtle but he is not malicious."

"Weakness of attitude becomes weakness of character."

"I never think of the future. It comes soon enough."

"The eternal mystery of the world is its comprehensibility."

"Sometimes one pays most for the things one gets for nothing."

"Science without religion is lame. Religion without science is blind."

"Anyone who has never made a mistake has never tried anything new."

"Great spirits have often encountered violent opposition from weak minds."

"Everything should be made as simple as possible, but not simpler."

"Common sense is the collection of prejudices acquired by age eighteen."

"Science is a wonderful thing if one does not have to earn one's living at it."

"The secret to creativity is knowing how to hide your sources."

"The only thing that interferes with my learning is my education."

"God does not care about our mathematical difficulties. He integrates empirically."

"The whole of science is nothing more than a refinement of everyday thinking."

"Technological progress is like an axe in the hands of a pathological criminal."

"Peace cannot be kept by force. It can only be achieved by understanding."

"The most incomprehensible thing about the world is that it is comprehensible."

"We can't solve problems by using the same kind of thinking we used when we created them."

"Education is what remains after one has forgotten everything he learned in school."

"The important thing is not to stop questioning. Curiosity has its own reason for existing."

"Do not worry about your difficulties in Mathematics. I can assure you mine are still greater."

"Equations are more important to me, because politics is for the present, but an equation is something for eternity."

"If A is a success in life, then A equals x plus y plus z. Work is x; y is play; and z is keeping your mouth shut."

"Two things are infinite: the universe and human stupidity; and I'm not sure about the the universe."

"As far as the laws of mathematics refer to reality, they are not certain, as far as they are certain, they do not refer to reality."

"Whoever undertakes to set himself up as a judge of Truth and Knowledge is shipwrecked by the laughter of the gods."

"I know not with what weapons World War III will be fought, but World War IV will be fought with sticks and stones."

"In order to form an immaculate member of a flock of sheep one must, above all, be a sheep."

"The fear of death is the most unjustified of all fears, for there's no risk of accident for someone who's dead."

"Too many of us look upon Americans as dollar chasers. This is a cruel libel, even if it is reiterated thoughtlessly by the Americans themselves."

"Heroism on command, senseless violence, and all the loathsome nonsense that goes by the name of patriotism – how passionately I hate them!"

"No, this trick won't work...How on earth are you ever going to explain in terms of chemistry and physics so important a biological phenomenon as first love?"

"My religion consists of a humble admiration of the illimitable superior spirit who reveals himself in the slight details we are able to perceive with our frail and feeble mind."

"Yes, we have to divide up our time like that, between our politics and our equations. But to me our equations are far more important, for politics are only a matter of present concern. A mathematical equation stands forever."

"The release of atom power has changed everything except our way of thinking...the solution to this problem lies in the heart of mankind. If only I had known, I should have become a watch-maker."

"Great spirits have always found violent opposition from mediocrities. The latter cannot understand it when a man does not thoughtlessly submit to hereditary prejudices but honestly and courageously uses his intelligence."

"The most beautiful thing we can experience is the mysterious. It is the source of all true art and all science. He to whom this emotion is a stranger, who can no longer pause to wonder and stand rapt in awe, is as good as dead: his eyes are closed."

"A man's ethical behavior should be based effectually on sympathy, education, and social ties; no religious basis is necessary. Man would indeed be in a poor way if he had to be restrained by fear of punishment and hope of reward after death."

"The further the spiritual evolution of mankind advances, the more certain it seems to me that the path to genuine religiosity does not lie through the fear of life, and the fear of death, and blind faith, but through striving after rational knowledge."

"Now he has departed from this strange world a little ahead of me. That means nothing. People like us, who believe in physics, know that the distinction between past, present, and future is only a stubbornly persistent illusion."

"You see, wire telegraph is a kind of a very, very long cat. You pull his tail in New York and his head is meowing in Los Angeles. Do you understand this? And radio operates exactly the same way: you send signals here, they receive them there. The only difference is that there is no cat."

"One had to cram all this stuff into one's mind for the examinations, whether one liked it or not. This coercion had such a deterring effect on me that, after I had passed the final examination, I found the consideration of any scientific problems distasteful to me for an entire year."

"...one of the strongest motives that lead men to art and science is escape from everyday life with its painful crudity and hopeless dreariness, from the fetters of one's own ever-shifting desires. A finely tempered nature longs to escape from the personal life into the world of objective perception and thought."

"He who joyfully marches to music rank and file, has already earned my contempt. He has been given a large brain by mistake, since for him the spinal cord would surely suffice. This disgrace to civilization should be done away with at once. Heroism at command, how violently I hate all this, how despicable and ignoble war is; I would rather be torn to shreds than be a part of so base an action. It is my conviction that killing under the cloak of war is nothing but an act of murder."

"A human being is a part of a whole, called by us *universe*, a part limited in time and space. He experiences himself, his thoughts and feelings as something separated from the rest... a kind of



optical delusion of his consciousness. This delusion is a kind of prison for us, restricting us to our personal desires and to affection for a few persons nearest to us. Our task must be to free ourselves from this prison by widening our circle of compassion to embrace all living creatures and the whole of nature in its beauty."

"Not everything that counts can be counted, and not everything that can be counted counts."

(Sign hanging in Einstein's office at Princeton)

Copyright: Kevin Harris 1995 (may be freely distributed with this acknowledgement)